MODULO: ESTADISTICA INFERENCIAL

Ejercicios de la distribución normal

1.-En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°

$$p[21 < X \leq 27] = p\left(\frac{21-23}{5} < Z \leq \frac{27-23}{5}\right) =$$

$$= p(-0.4 < Z \leq 0.8) = p(Z \leq 0.8) - [1 - p(Z \leq 0.4)] =$$

$$= 0.7881 - (1 - 0.6554) = 0.4425 \cdot 30 = 13$$

2.-La media de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:

.-Entre 60 kg y 75 kg

$$p[60 < X \leq 75] = p\left(\frac{60-70}{3} < Z \leq \frac{75-70}{3}\right) =$$

$$= p(-3.33 < Z \leq 1.67) = p(Z \leq 1.67) - [1 - p(Z \leq 3.33)] =$$

$$= 0.9525 - (1 - 0.9996) = 0.9521 \cdot 500 = 476$$

.-Más de 90 kg

$$p(X > 90) = p\left(Z > \frac{90-70}{3}\right) = p(Z > 6.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 6.67) = 1 - 1 = 0 \cdot 500 = 0$$

.-Menos de 64 kg

$$p(X < 64) = p\left(Z < \frac{64-70}{3}\right) = p(Z < -2) = 1 - p(Z \leq 2) =$$

$$= 1 - 0.7772 = 0.02128 \cdot 500 = 11$$

.-64 kg

$$p(X = 64) = p\left(Z = \frac{64-70}{3}\right) = p(Z = -2) = 0 \cdot 500 = 0$$

.-64 kg o menos

$$p(X \leq 64) = p(X < 64) = 11$$

3.-Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y desviación típica 36. Se pide:

.- ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

$$p(X > 72) = p\left(Z > \frac{72-78}{36}\right) =$$

$$= p(Z > -0.16) = p(Z < 0.16) = 0.5636$$

.-Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas)

$$p(X \le N) = 0.25 \Rightarrow p\left(Z \le \frac{N-78}{36}\right) = 0.25$$

$$\frac{N-78}{36} < 0 \qquad 1 - p\left(Z \le -\frac{N-78}{36}\right) = 0.25$$

$$p\left(Z \le \frac{-N+78}{36}\right) = 0.75 \Rightarrow \frac{-N+78}{36} = 0.68 \qquad N = 54$$

$$p(X > 54+5) = p(X > 59) = p\left(Z > \frac{59-78}{36}\right) =$$

$$p(Z > -0.53) = p(Z < 0.53) = 0.7019 = 70.19\%$$

.-Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la probabilidad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

$$p(X > 84) = p\left(Z > \frac{84-78}{36}\right) = p(Z > 0.16) =$$

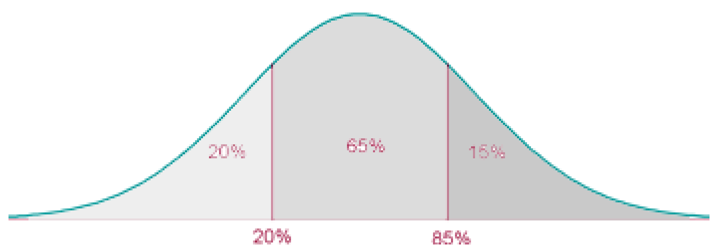
$$= 1 - p(Z < 0.16) = 1 - 0.5636 = 0.4364$$

$$p(x > 84 / x > 72) = \frac{p\left[x > 84 \cap x > 72\right]}{p\left(x > 72\right)} =$$

$$= \frac{p\left(x > 84\right)}{p\left(x > 72\right)} = \frac{0.4364}{0.5636} = 0.774$$

4.-Tras un test de cultura general se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución una distribución N(65, 18). Se desea clasificar a los examinados en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de excelente cultura general) de modo que hay en el primero un 20% la población, un 65% el segundo y un 15% en el tercero. ¿Cuáles han de ser las puntuaciones que marcan el paso de un grupo al otro?

?



$p\left(Z \le z_1\right) = 0.2$ $\qquad$ $p\left(Z \le -z_1\right) = 0.8$

$-z_1 = 0.84$ $\qquad$ $z = -0.84$

$\frac{X_1 - 65}{18} = -0.84$ $\qquad$ $X_1 = 49.88$

$p\left(Z \le z_2\right) = 0.2$ $\qquad$ $z_2 = 1.04$

$$\frac{X_2 - 65}{18} = 1.04 \qquad\qquad X_2 = 83.72$$

Baja cultura hasta 49 puntos.

Cultura aceptable entre 50 y 83.

Excelente cultura a partir de 84 puntos.

5.-Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15

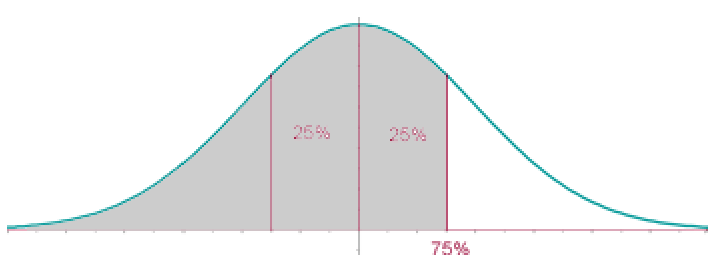
.-Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110

$$p(95 < X \leq 110) = p\left(\frac{95-100}{15} < Z \leq \frac{110-100}{15}\right) =$$

$$= p(0.33 < Z \leq 0.67) = p(Z \leq 0.67) - [1 - p(Z \leq 0.33)] =$$

$$= 0.7486 - (1 - 0.6293) = 0.3779$$

.-¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?



$p = \ 0.75$ $\qquad$ $z = 0.675$

$\frac{X - 100}{15} = 0.675$ $\qquad$ $X = 110$

$(90,\ 110)$

.-En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

$$p(X > 125) = p\left(Z > \frac{125 - 100}{15}\right) = p(Z > 1.67) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.67) = 1 - 0.9525 = 0.0475 \cdot 2500 = 119$$

6.-En una ciudad una de cada tres familias posee teléfono. Si se eligen al azar 90 familias, calcular la probabilidad de que entre ellas haya por lo menos 30 tengan teléfono

$n \cdot p > 5$ $\qquad$ $n \cdot q > 5$

$$B\left(90, \frac{1}{3}\right) \to N\left(90 \cdot \frac{1}{3}, \sqrt{90 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}\right) = N(30,\ 4.47)$$

$$p(X > 30) = p\left(Z > \frac{30 - 30}{4.47}\right) = p(Z > 0) = 1 - p(Z \leq 0) = 0.5$$

7.-En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen

$n = 200 \qquad p = 0.5 \qquad q = 0.5$

$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$

$$B(200, 0.5) \rightarrow N\left(200 \cdot 0.5,\ \sqrt{200 \cdot 0.5 \cdot 0.5}\right) = N(100,\ 7.07)$$

$$p(X > 110) = p\left(Z > \frac{110-100}{7.07}\right) = p(Z > 1.41) =$$

$$= 1 - p(Z < 1.41) = 1 - 0.92073 = 0.07927$$

8.-Un estudio ha mostrado que, en un cierto barrio, el 60% de los hogares tienen al menos dos televisores Se elige al azar una muestra de 50 hogares en el citado barrio. Se pide:

.- ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 20 de los citados hogares tengan cuando menos dos televisores?

$n = 50 \qquad p = 0.6 \qquad q = 0.4$

$n \cdot p > 5 \qquad n \cdot q > 5$

$$B(50, 0.6) \rightarrow N\left(50 \cdot 0.6, \sqrt{50 \cdot 0.6 \cdot 0.4}\right) = N(30,\ 3.46)$$

$$p(X > 20) = p\left(Z > \frac{20-30}{3.46}\right) =$$

$$p(Z > -2.89) = p(Z \leq 2.89) = 0.9981$$

.- ¿Cuál es la probabilidad de que entre 35 y 40 hogares tengan cuando menos dos televisores?

$$p(35 < X \leq 40) = p\left(\frac{35-30}{3.46} < Z \leq \frac{40-30}{3.46}\right) =$$

$$= 0.9981 - 0.9265 = 0.0716$$